Prof. Dr. Tatjana Lange
Prof. Dr. Karl Mosler

Übungsaufgaben zum Lehrbuch

Statistik kompakt -
Basiswissen für Ökonomen und Ingenieure

1 Summen und Produkte

Aufgabe 1.1

Schreiben Sie ausführlich:

$$\text{a)} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i\,, \qquad \text{b)} \sum_{i=1}^{n} a\,, \qquad \text{c)} \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4} x_i y_j\,, \qquad \text{d)} \sum_{i=1}^{4} x_i y_i\,.$$

Aufgabe 1.2

Berechnen Sie den Wert der folgenden Summen:

$$\text{a)} \sum_{i=1}^{11} i\,, \qquad \text{b)} \sum_{i=0}^{8} (4i+5)\,, \qquad \text{c)} \sum_{i=-2}^{2} \frac{1}{2} i^2\,, \qquad \text{d)} \sum_{i=1}^{5} \frac{(i-3)^2}{2}\,.$$

Aufgabe 1.3

Stellen Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe des Summenzeichens dar:

a) "Die Summe der ersten fünfzig natürlichen Zahlen."

b) "Die Summe der ersten zehn Quadratzahlen."

c) "Die Summe der ersten zehn geraden Zahlen."

d) "Die Summe der Quadrate aller geraden Zahlen von 100 bis 200."

Aufgabe 1.4

Es seien die folgenden $n = 3$ Messreihen der Länge $m = 4$ gegeben:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
x_{1j}	1	3	5
x_{2j}	2	4	6
x_{3j}	1	2	1
x_{4j}	5	4	0

Berechnen Sie die folgenden Summen mit $c = 2$:

a) $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c \,,$ b) $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c x_{ij} \,,$ c) $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij} + c) \,,$

d) $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_{1j} + x_{i3}) \,,$ e) $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{1j} x_{i2} \,.$

Aufgabe 1.5

Fassen Sie mit Hilfe des Summenzeichens zusammen:

a) $a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \,,$

b) $1 + 4 + 9 + 16 + 25 \,,$

c) $3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 2x_1 y + 4x_2 y^2 + 6x_3 y^3 \,,$

d) $x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_1 y_3 + x_2 y_1 + x_2 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 + x_3 y_2 + x_3 y_3 \,.$

Aufgabe 1.6

Zeigen Sie, dass für beliebige reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_5$ gilt

a) $$\sum_{i=1}^{5} \left[x_i - \frac{1}{5} \sum_{j=1}^{5} x_j \right] = 0 \,,$$

b) $$\sum_{i=1}^{5} \left[x_i - \frac{1}{5} \sum_{j=1}^{5} x_j \right]^2 = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 - \frac{1}{5} \left(\sum_{i=1}^{5} x_i \right)^2 \,.$$

Gelten diese Aussagen auch noch, wenn 5 durch eine beliebige natürliche Zahl n ersetzt wird?

Aufgabe 1.7

Berechen Sie den Wert der folgenden Produkte:

a) $\prod_{i=1}^{5} i \,,$ b) $\prod_{i=1}^{5} 2i^2 \,,$ c) $\prod_{i=1}^{20} \left(1 + \frac{1}{i} \right) \,,$ d) $\prod_{i=-2}^{3} (2i - 1) \,.$

Aufgabe 1.8

Fassen Sie mit Hilfe des Produktzeichens zusammen:

a) $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8\,,$

b) $1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 25\,,$

c) $\dfrac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\,,$

d) $3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 15\,.$

Aufgabe 1.9

Ein Kunde zahlt zu Jahresbeginn jeweils 1 000 Euro auf sein Sparbuch ein. Pro Jahr erhält er 5% Zinsen.

a) Welcher Betrag steht dem Kunden zu Beginn des 4. Jahres zur Verfügung?

b) Versuchen Sie den mathematischen Zusammenhang für einen Zeitraum von 10 Jahren in allgemeiner Schreibweise zusammenzufassen.

2 Kombinatorik

Aufgabe 2.1

a) Vor einem Bankschalter stehen sieben Personen und warten in einer Schlange. Wie viele verschiedene Anordnungen innerhalb der Schlange sind möglich?

b) Wenig später öffnet der Nachbarschalter. Daraufhin wechseln vier Personen zum zweiten Schalter. Wie viele Möglichkeiten gibt es nun, vier von den sieben Personen in einer neuen Schlange (vor dem zweiten Schalter) anzuordnen?

Aufgabe 2.2

An einem Judo-Turnier nehmen in der Gewichtsklasse von 70 bis 77 Kilogramm acht Kämpfer teil. Wie viele verschiedene Einzelpaarungen sind möglich?

Aufgabe 2.3

Vier Würfel werden gleichzeitig geworfen. Wie viele verschiedene Zusammenstellungen von Augenzahlen sind dabei möglich?

Aufgabe 2.4

Ein Bit kann zwei Zustände (0 oder 1) annehmen. Ein Byte besteht aus 8 Bits (z.B. 01101011). Wie viele verschiedene Bytes gibt es?

Aufgabe 2.5

In der ersten Fußball-Liga eines Landes spielen in der Saison 1999/2000 15 Mannschaften um die Meisterschaft – darunter die Mannschaften Pechstadt und Glückstein.

a) Wie viele Spiele finden in der Saison, also in Hin- und Rückrunde insgesamt, statt?

b) Wie viele verschiedene Platzierungs-Tabellen der Liga sind nach dem letzten Spieltag der Saison theoretisch möglich?

c) Wie ändert sich die Anzahl aus Teil b), wenn nach dem letzten Spieltag die Mannschaft aus Pechstadt auf Platz 15 und die Mannschaft aus Glückstein auf Platz 1 liegt?

Aufgabe 2.6

Ein Zahlenschloss besitzt fünf Ringe, die jeweils die Ziffern $0, ..., 9$ tragen.

a) Wie viele verschiedene fünfstellige Zahlencodes sind möglich?

b) Wie ändert sich die Anzahl aus Teil a), wenn in dem Zahlencode jede Ziffer nur einmal vorkommen darf, d.h. der Zahlencode aus fünf verschiedenen Ziffern bestehen soll?

c) Wie ändert sich die Anzahl aus Teil a), wenn der Zahlencode nur aus gleichen Ziffern bestehen soll?

Aufgabe 2.7

Bei einer Wahl hat jeder Wahlberechtigte zwei Stimmen. Auf dem Wahlschein sind drei Kandidaten A, B und C aufgeführt.

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, den Wahlschein auszufüllen, wenn bei jedem Kandidaten höchstens ein Kreuz stehen darf?

b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, den Wahlschein auszufüllen, wenn auch „gehäufelt“ werden darf, d.h. wenn ein Kandidat auch mehr als nur ein Kreuz erhalten darf?

Aufgabe 2.8

In einer Partei sind drei verschiedene Positionen zu vergeben. Hierfür stehen sechs Kandidaten zur Verfügung. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die drei Positionen zu besetzen, wenn

a) jeder Kandidat höchstens eine Position besetzen darf?

b) jeder Kandidat höchstens zwei Positionen besetzen darf?

c) jeder Kandidat beliebig viele Positionen (d.h. auch alle drei) besetzen darf?

Aufgabe 2.9

Einer Gruppe von 15 Studenten werden drei Eintrittskarten für eine Veranstaltung angeboten. Auf wie viele Arten können die Karten verteilt werden, wenn sie

a) drei nummerierte Sitzplätze sind,

b) drei unnummerierte Stehplätze sind?

Unterscheiden Sie bei den beiden Teilaufgaben auch, ob ein Student

(i) genau eine Karte oder

(ii) mehrere Karten nehmen kann.

Aufgabe 2.10

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die 12 Halbtöne (einer Oktave) ohne Wiederholung zu spielen? (Natürlich ohne den Rhythmus zu beachten.)

b) Jeder Dominostein wird durch zwei Zahlen charakterisiert. Die Steine sind symmetrisch, so dass das Nummernpaar nicht geordnet ist. Wieviele Dominosteine kann man erzeugen, wenn die Nummern $1, 2, ..., n$ benutzt werden?

Aufgabe 2.11

In einer Fabrikhalle haben acht Werkstätten Platz.

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, in der Halle acht verschiedene Werkstätten einzurichten?

b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, in dieser Halle zwei Zuschneidestationen, zwei Drehbänke und drei Lackierstationen einzurichten? (Eine Stelle bleibt also frei.)

Aufgabe 2.12

In der Fußball-Bundesliga spielen 18 Mannschaften. Sowohl in der Hin- all auch in der Rückrunde einer Saison spielt jede Mannschaft gegen jede andere Mannschaft.

a) Wie viele Spiele finden an einem Spieltag statt?

b) Wie viele Spieltage gibt es pro Saison?

c) Wie viele Spiele finden ingesamt in einer Saison statt?

Aufgabe 2.13

a) 20 Personen verabschieden sich voneinander mit Händedruck. Jeder geht alleine nach Hause. Wie oft werden dabei die Hände gedrückt?

b) 15 Ehepaare verabschieden sich voneinander mit Händedruck und gehen paarweise nach Hause. Wie oft werden dabei die Hände gedrückt?

c) Die 15 Ehepaare verabschieden sich folgendermaßen: Die Herren von den Herren mit Händedruck, die Damen von den Damen mit Küsschen auf beide Wangen, die Damen von den Herren mit Händedruck und Küsschen auf die rechte Wange. Die Ehepaare gehen wieder paarweise nach Hause. Wie viele Küsschen werden gegeben? Wie oft werden die Hände gedrückt?

3 Elementare Datenanalyse

Aufgabe 3.1

Bezeichnen Sie für die folgenden Merkmale jeweils das Skalenniveau, auf dem das Merkmal gemessen wird, und nennen Sie mögliche Merkmalsausprägungen.

Geschlecht	Sparguthaben
Rendite von Wertpapieren	Kontonummer
Handelsklasse	Gewicht
Religionszugehörigkeit	Freizeitbeschäftigung
Geburtsdatum	Schulbildung

Aufgabe 3.2

Geben Sie bei den folgenden Größen an, ob es sich um eine Bestands- oder eine Bewegungsmasse handelt. Nennen Sie für jede Bestandsmasse zugehörige Bewegungsmassen.

Bevölkerung	Vermögen
Umsatz	Zinsen aus Vermögen
Anzahl der Arbeitslosen	Geburten und Sterbefälle
Autoproduktion	Zugelassene Kraftfahrzeuge
Investitionen	Einkommen

Aufgabe 3.3

Der Verband der Tierschützer befragt 40 Haushalte einer Reihenhaussiedlung nach der Anzahl der gehaltenen Haustiere. Dabei ergibt sich folgendes Ergebnis:

7, 1, 1, 2, 0, 2, 3, 2, 1, 0, 7, 0, 4, 1, 3, 1, 1, 1, 2, 0,
5, 1, 1, 0, 2, 0, 0, 1, 2, 1, 6, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 3, 8.

a) Geben Sie für die Anzahl der Haustiere die diskrete Klassierung mit absoluten und mit relativen Häufigkeiten an und stellen Sie sie graphisch dar.

b) Bestimmen Sie den Modus.

Aufgabe 3.4

In der Betriebskantine werden verschiedene Mittagessen angeboten. Zur Wahl stehen: ein vegetarisches Essen (VE), "Fast Food" (FF), ein Eintopf (E) und ein Komponentenessen (KE). Im letzen Monat wurden von den Mitarbeitern insgesamt 500 Essen wie folgt bestellt:

Mittagessen	VE	FF	E	KE
Anzahl der Mitarbeiter	85	135	92	188

a) Bezeichnen Sie die statistischen Begriffe, die den folgenden Angaben in der Aufgabenstellung entsprechen:

(1) die Zahl 500,

(2) das Essen "Eintopf",

(3) die Zahl 85,

(4) die Gesamtheit der Paare (VE , 85), (FF , 135), (E , 92), (KE , 188)?

b) Berechnen Sie die relativen Häufigkeiten und stellen Sie sie graphisch dar.

Aufgabe 3.5

Zehn Untersuchungseinheiten wurden aus einer bestimmten Grundgesamtheit gezogen und jeweils das Merkmal X gemessen

$$x_1 = 3,\ x_2 = 1,\ x_3 = 4,\ x_4 = 5,\ x_5 = 2,\ x_6 = 6,\ x_7 = 3,\ x_8 = 4,\ x_9 = 1,\ x_{10} = 5.$$

a) Zeichnen Sie die empirische Verteilungsfunktion.

b) Lassen sich aus einer empirischen Verteilungsfunktion die absoluten Häufigkeiten der Merkmalswerte ermitteln?

Aufgabe 3.6

Bei einer Abschlussprüfung sind 18 Aufgaben zu bearbeiten, wobei pro Aufgabe ein Punkt erzielt werden kann. Als „nicht bestanden“ gilt die Prüfung, wenn ein Kandidat weniger als sieben Punkte erreicht. Bei sieben bis vierzehn Punkten wird die Note „bestanden“ vergeben, bei mehr als vierzehn Punkten die Note „mit besonderem Erfolg bestanden“.

Die Korrektur der Klausur ergab folgende Häufigkeitsverteilung der erreichten Punktzahlen ξ_j:

ξ_j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
n_j	4	1	1	0	7	5	6	4	7	7	17	22	13	16	1	5	2	2	0

a) Errechnen Sie die diskrete Klassierung gemäß den vergebenen Noten und stellen Sie sie graphisch dar.

b) Inwiefern ist die diskrete Klassierung nach Noten mehr oder weniger informativ als die Klassierung nach Punktzahlen?

Aufgabe 3.7

In der Kölner Fußgängerzone wurden 60 zufällig ausgewählte Erwachsene nach ihrem höchsten Schul- oder Studienabschluss befragt. Dabei wurden die folgenden Antworten registriert:

Abschluss	Häufigkeit
ohne	4
Hauptschule	20
Realschule	15
Gymnasium	10
Fachhochschule	5
Universität	6

a) Stellen Sie die diskrete Klassierung graphisch dar.

b) Geben Sie die relativen Häufigkeiten an.

Aufgabe 3.8

Ein Marktforschungsinstitut befragt 40 Kunden eines Teeladens nach der Anzahl der von ihnen durchschnittlich pro Tag getrunkenen Tassen Tee. Dabei ergaben sich die folgenden Zahlen:

Anzahl der Tassen	1	2	3	4	5	6
Anzahl der Kunden	4	8	15	6	5	2

a) Wie hoch ist der Anteil der Kunden, die höchstens 4 Tassen pro Tag trinken?

b) Wie hoch ist der Anteil der Befragten, die mindestens 3 und höchstens 5 Tassen pro Tag trinken?

c) Welche Anzahl an Tassen pro Tag wird von 95% der Kunden nicht überschritten?

d) Bestimmen Sie den Median. Wie verändert sich der Median, wenn einer der Kunden statt 2 Tassen Tee pro Tag 7 Tassen angeben würde?

Aufgabe 3.9

Für die 25 Tage eines Monats, an dem ein Einzelhändler sein Geschäft geöffnet hatte, wurden folgende Verkaufszahlen eines bestimmten Artikels registriert:

an 3 Tagen:	0 Stück,
an 2 Tagen:	1 Stück,
an 4 Tagen:	2 Stück,
an 3 Tagen:	3 Stück,
an 8 Tagen:	4 Stück,
an 4 Tagen:	6 Stück,
an 1 Tagen:	8 Stück.

a) Geben Sie die Grundgesamtheit und das Merkmal an.

b) Stellen Sie die Daten in einer Häufigkeitstabelle mit absoluten und relativen Häufigkeiten dar.

c) Geben Sie die empirische Verteilungsfunktion explizit an und stellen Sie diese graphisch dar.

d) Betrachten Sie jeweils den Anteil der Tage, an denen

   (1) höchstens 4,
   (2) weniger als 4,
   (3) höchstens 2.5,
   (4) mehr als 2.5,
   (5) mindestens 2,
   (6) mehr als 2 und höchstens 6.3

   Stück verkauft wurden. Drücken Sie diese Anteile durch die empirische Verteilungsfunktion aus und berechnen Sie diese.

e) Berechnen Sie den Median und interpretieren Sie ihn.

f) Finden Sie das kleinste x, für das $F(x) \geq 0.3$ ist.

Aufgabe 3.10

Die Umfrage des Tierschützerverbandes in der Reihenhaussiedlung aus Aufgabe 3.3 ergab folgendes Ergebnis:

a) Berechnen Sie die empirische Verteilungsfunktion und stellen Sie sie graphisch dar.

b) Bestimmen Sie für die Anzahl der Haustiere rechnerisch und graphisch den Median und das 0.7–Quantil und interpretieren Sie diese Werte.

c) Welche Haustieranzahl wird nur von 10% der Befragten überschritten?

Aufgabe 3.11

Bei einer statistischen Untersuchung wurden für ein metrisches Merkmal X die Daten $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ gemessen und daraus die empirische Verteilungsfunktion berechnet:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 3\,, \\ 0.20 & \text{für } 3 \leq x < 4\,, \\ 0.45 & \text{für } 4 \leq x < 6\,, \\ 0.50 & \text{für } 6 \leq x < 10\,, \\ 0.75 & \text{für } 10 \leq x < 12\,, \\ 1 & \text{für } x \geq 12\,. \end{cases}$$

Stellen Sie die empirische Verteilungsfunktion graphisch dar und bestimmen Sie anhand der Graphik das untere und obere Quartil.

Aufgabe 3.12

Eine Autozeitschrift will zwei neue Kleinwagen vergleichen. Von Interesse ist unter anderem der Benzinverbrauch auf 100 km. Mit Wagen A werden 50 Fahrten gemacht. Das Ergebnis der Messungen zeigt die folgende Tabelle:

Benzinverbrauch (in Litern je 100 km)	Anteil der Fahrten
5.0	0.02
5.5	0.06
6.0	0.16
6.4	0.30
6.9	0.34
7.5	0.08
7.8	0.04

Da der Redaktionsschluss naht, können mit Wagen B nur noch 20 Fahrten unternommen werden. Die Testergebnisse sind die folgenden:

4.2, 4.8, 4.8, 4.8, 5.4, 5.4, 5.4, 5.4, 5.4, 5.4,
5.9, 5.9, 5.9, 5.9, 5.9, 5.9, 6.0, 6.0, 6.0, 6.5.

a) Berechnen Sie für Wagen B die relativen Häufigkeiten und stellen Sie sie graphisch dar.

b) Bestimmen Sie für den Benzinverbrauch bei Wagen A und B jeweils den Median.

c) Auf wie vielen Fahrten haben Wagen A bzw. Wagen B weniger als 6.5 Liter verbraucht?

Aufgabe 3.13

Der Verband der Tierschützer, der auch die Umfrage in der Reihenhaussiedlung gemacht hat (vgl. Aufgabe 3.3 und 3.10), befragt zusätzlich die 20 Parteien eines Hochhauses nach der Anzahl der Haustiere. Dabei ergibt sich folgendes Ergebnis:

6, 1, 2, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 4, 1, 3, 0, 1, 1, 2, 0, 5, 1.

a) Berechnen Sie für die Anzahl der Haustiere den Median, das 1. und 3. Quartil und das 0.33–Quantil.

b) Zeichnen Sie den zugehörigen Boxplot.

Aufgabe 3.14

In einer Automobilfabrik wurden die Höchstgeschwindigkeiten von 400 Kraftfahrzeugen eines bestimmten Typs gemessen. Dabei ergaben sich folgende Messergebnisse:

Höchstgeschwindigkeit (in km/h)	absolute Häufigkeit
[135,140]	18
]140,142]	38
]142,144]	82
]144,146]	105
]146,148]	89
]148,150]	46
]150,155]	22

a) Bestimmen Sie die relativen Häufgkeiten der stetigen Klassierung.

b) Stellen Sie die Daten anhand eines Histogramms graphisch dar.

c) Zeichnen Sie die empirische Verteilungsfunktion.

Aufgabe 3.15

Gegeben ist die Bevölkerung Deutschlands nach Altersklassen im Jahr 1997:

Altersklasse (in Jahren)	Bevölkerung in Millionen östliche Bundesländer	westliche Bundesländer
0 - 15	2.28	10.82
15 - 21	1.28	4.17
21 - 40	4.21	19.45
40 - 60	4.26	17.65
60 - 65	0.99	3.97
65 - ...	2.35	10.62

a) In welchen Bundesländern ist der Anteil der Menschen bis 18 Jahre höher? In welchen Bundesländern ist der Anteil der Menschen, die über 62 Jahre alt sind, höher?

b) Zeichnen Sie die empirische Verteilungsfunktion $F(x)$ für die östlichen Bundesländer.

c) Zeichnen Sie für die Altersverteilung der östlichen Bundesländer ein Histogramm.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass die Obergrenze der letzten Klasse $x_6^o = 100$ ist.

Aufgabe 3.16

In einer Gemeinde wurde die Haushaltsgröße der privaten Haushalte ermittelt. Dabei ergaben sich die folgenden Daten:

a) Berechnen Sie die durchschnittliche Haushaltsgröße in der Gemeinde.

b) Bestimmen Sie die Quartile der Haushaltsgröße.

Aufgabe 3.17

Aus einer Urliste von Daten wurde die folgende empirische Verteilungsfunktion berechnet:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 2 \ , \\ 0.15 & \text{für } 2 \leq x < 3 \ , \\ 0.35 & \text{für } 3 \leq x < 5 \ , \\ 0.60 & \text{für } 5 \leq x < 8 \ , \\ 0.80 & \text{für } 8 \leq x < 10 \ , \\ 1 & \text{für } x \geq 10 \ . \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie den Median der Daten.

b) Berechnen Sie das arithmetische Mittel.

c) Was können Sie über die Anzahl der Daten in der Urliste sagen?

Aufgabe 3.18

An zwei Registrierkassen eines Supermarktes wurden eine Stunde lang jeweils die Bedienungszeiten (in Sekunden) gemessen:

Kasse 1	35 45 15 36 68 75 12 9 35 23 45 25 28 67 46
Kasse 2	76 21 49 63 47 48 69 62 52 41 68 79 45 32 11 12 16 45 23 7

a) Berechnen Sie die arithmetischen Mittel der Bedienungszeiten für die zwei Kassen getrennt sowie für beide Kassen insgesamt.

b) Bestimmen Sie für jede Kasse den Median sowie das untere und obere Quartil der Bedienungszeiten. Zeichnen Sie für beide Kassen die Boxplots der Bedienungszeiten.

Aufgabe 3.19

Ein Haus wird von zehn Personen bewohnt. Fünf dieser Personen haben ein Monatseinkommen von je 2 500 Euro, die übrigen Personen haben Monatseinkommen von 2 600, 2 700, 2 800, 2 900 und 3 000 Euro. In das Haus zieht eine weitere Person ein, deren Monatseinkommen 100 000 Euro beträgt. Welche Auswirkungen ergeben sich dadurch auf den Modus, den Median und das arithmetische Mittel der Monatseinkommen aller Einwohner des Hauses?

Aufgabe 3.20

Im Rahmen einer Flurbereinigung werden die Nutzflächen (in ha) von 40 landwirtschaftlichen Betrieben ermittelt:

3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 14,
16, 16, 18, 21, 25, 28, 33, 36, 40, 40, 48, 60, 69, 77, 77, 80, 99.

a) Berechnen Sie aus diesen Einzelwerten die durchschnittliche Nutzfläche und die Varianz der Nutzfläche.

b) Bilden Sie eine stetige Klassierung der Daten (Klassen: 2 bis 4, über 4 bis 9, über 9 bis 20, über 20 bis 50, über 50 bis 100 ha), und berechnen Sie daraus die durchschnittliche Nutzfläche. Begründen Sie den Unterschied zu a).

c) Berechnen Sie die Varianz der Nutzfläche aus der stetigen Klassierung in b). Begründen Sie den Unterschied zu a).

d) Berechnen Sie zunächst für jede Klasse aus b) den Durchschnitt und aus den Klassendurchschnitten den Gesamtdurchschnitt der Nutzfläche.

Aufgabe 3.21

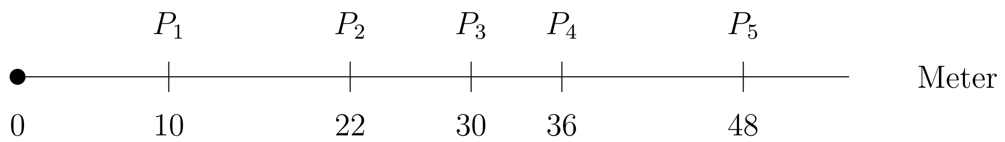
Gegeben sind die drei nachstehenden stetigen Klassierungen I, II und III:

		I	II	III
j	K_j	n_j	n_j	n_j
1	[0,5]	5	3	2
2	]5,10]	6	4	3
3	]10,15]	4	6	4
4	]15,20]	3	4	6
5	]20,25]	2	3	5

Bestimmen Sie für jede Verteilung die Lagemaße Median und arithmetisches Mittel und vergleichen Sie die Verteilungen.

Aufgabe 3.22

In einer Fertigungshalle eines Betriebs seien fünf Produktionsstätten $P_1, \dots, P_5$ auf einer Fertigungsstraße entlang einer Geraden hintereinander in folgenden Abständen angeordnet (Start der Straße bei Meter Null):



Produktionsstätte	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
Anzahl der Arbeiter	8	5	2	5	18

Um die Produktionsstätten mit Material zu beliefern, soll ein Zwischenlager auf dieser Straße gebaut werden. Die Summe der von den Arbeitern zurückgelegten Wegstrecken zum Lager soll minimal werden. (Nehmen Sie dafür an, dass jeder Arbeiter einer Produktionsstätte einmal am Tag zum Lager muss.) Wo würden Sie, wenn jeder Platz an der Straße ansonsten in gleicher Weise geeignet ist, das Lager bauen?

Aufgabe 3.23

Es sei $x_1, \dots, x_n$ eine Messreihe $\overline{x}$ das zugehörige arithmetische Mittel.

a) Man zeige: Werden die Werte der Messreihe gemäß $y_i = a + b \cdot x_i$, $i = 1, \ldots n$, linear transformiert, so gilt für das arithmetische Mittel $\overline{y}$ der transformierten Werte

$$\overline{y} = a + b \cdot \overline{x},$$

d.h. das arithmetische Mittel der transformierten Werte ist gleich dem transformierten arithmetischen Mittel der ursprünglichen Werte.

b) Auf einer Touristeninsel in der Karibik wurden in den letzten beiden Juliwochen jeweils morgens zur gleichen Zeit die folgenden Lufttemperaturen in Grad Fahrenheit (°F) gemessen:

$$76,\ 84,\ 82,\ 76,\ 77,\ 85,\ 81,$$
$$79,\ 80,\ 81,\ 82,\ 81,\ 79,\ 77\,.$$

Man berechne die Durchschnittstemperatur, d. h. das arithmetische Mittel der gemessenen Temperaturen, in Grad Fahrenheit (°F) und in Grad Celsius (°C).

Hinweis: $x[°F]$ entsprechen $y = \frac{5}{9} \cdot (x - 32)[°C]$.

Aufgabe 3.24

Die folgende Tabelle enthält die Anzahl (in 100 000) und das durchschnittliche Nettoeinkommen je Monat (in 1 000 Euro) privater Haushalte im früheren Bundesgebiet für das Jahr 2006:

Nettoeinkommen über ... bis einschließlich ...	Anzahl der Haushalte	Durchschnittliches Nettoeinkommen
0 – 1.5	16	1.12
1.5 – 2.5	50	1.98
2.5 – 5	206	3.13
5 – 10	18	6.75
Summe	290	

a) Zeichnen Sie das Histogramm und die empirische Verteilungsfunktion.

b) Berechnen Sie für alle privaten Haushalte

(1) das durchschnittliche Nettoeinkommen,

(2) die Standardabweichung des Nettoeinkommens.

Aufgabe 3.25

Bruttoinlandsprodukt (BIP) 1998 in den fünf neuen Bundesländern in Mrd. DM:

Bundesland	BIP
Brandenburg	77.8
Mecklenburg–Vorpommern	48.4
Sachsen	125.3
Sachsen–Anhalt	71.4
Thüringen	66.5

a) Berechnen Sie für das Bruttoinlandsprodukt das arithmetische Mittel und den Median.

b) Berechnen Sie die Spannweite, den Quartilabstand, die mittlere absolute Abweichung vom Median und die Varianz.

c) Wie verändern sich die in a) und b) berechneten Größen, falls das Bruttoinlandsprodukt in Euro gemessen wird? (1.95583 DM = 1 Euro)

Aufgabe 3.26

Ein junges Kraftfahrt-Versicherungsunternehmen will die Vollkasko-Schäden des vergangenen Geschäftsjahres auswerten. Folgende Daten liegen vor [Angaben in Tsd. Euro]:

$$\begin{array}{rrrrrrr} 5,5 & 5,9 & 6,1 & 6,4 & 6,4 & 6,7 & 6,7 \\ 7,1 & 7,1 & 7,2 & 7,5 & 7,6 & 7,8 & 8,2 \\ 8,7 & 9,2 & 9,5 & 10,1 & 24,0 & 27,5 & 71,0 \end{array}$$

a) Berechnen Sie das arithmetische Mittel $\overline{x}$ sowie das α-getrimmte Mittel $\overline{x}_\alpha$ für $\alpha = 0,1$ und $\alpha = 0,2$. Was fällt dabei auf?

b) Berechnen Sie die Standardabweichung sowie die mittlere absolute Abweichung vom Median.

c) Berechnen Sie für die erste Zeile der Daten Ginis mittlere Differenz.

Aufgabe 3.27

70% der Belegschaft einer Firma sind Arbeiter, 25% Angestellte und 5% leitende Angestellte. Die folgende Tabelle enthält die arithmetischen Mittel und Standardabweichungen der Monatslöhne bzw. -gehälter (in Euro) dieser Gruppen:

	Arithmetisches Mittel	Standardabweichung
Arbeiter	3 000	1 000
Angestellte	5 000	2 000
Leitende Angestellte	11 000	4 000

a) Berechnen Sie das arithmetische Mittel und die Standardabweichung der Monatslöhne bzw. -gehälter aller Beschäftigten.

b) Wie groß ist der Anteil der durch die Aufteilung der Belegschaft in Arbeiter, Angestellte und leitende Angestellte erklärten Varianz an der Gesamtvarianz der Löhne bzw. Gehälter?

c) Tariferhöhungen ergeben:

- für Arbeiter 5% lineare Erhöhung und 200 Euro Sockelbetrag,
- für Angestellte 3% lineare Erhöhung und keinen Sockelbetrag,
- für leitende Angestellte keine Erhöhungen.

Berechnen Sie die Werte für a) und b) nach der Tariferhöhung.

Aufgabe 3.28

Bruttojahreseinkommen von Erwerbstätigen in einem Kölner Stadtteil:

Bruttojahreseinkommen (in Tsd. Euro über ... bis einschließlich ...	Anzahl der Erwerbstätigen
0 – 20	400
20 – 50	1 983
50 – 100	423

a) Stellen Sie die empirische Verteilungsfunktion graphisch dar.

b) Wie hoch ist der Anteil der Erwerbstätigen, die im Jahr höchstens 12 000 Euro brutto verdienen?

c) Wie hoch ist der Anteil der Erwerbstätigen, deren Bruttojahreseinkommen zwischen 65 000 und 85 000 Euro liegt?

d) Welches Bruttojahreseinkommen überschreiten die oberen 50% der aufgeführten Personen?

e) Wie hoch ist im Durchschnitt das Bruttojahreseinkommen der Erwerbstätigen in dem Stadtteil?

f) Berechnen Sie Quartilabstand, Varianz und Standardabweichung des Einkommens.

Aufgabe 3.29

Die folgende Tabelle enthält für die Länder der EU im Jahr 1998 jeweils die Einwohnerzahl, das Bruttoinlandsprodukt (BIP) sowie die Anzahl der Sitze im Europäischen Parlament:

Land	Einwohner (in Mio.)	BIP (in Mrd. DM)	Sitze
A	8.1	391	21
B	10.2	494	25
D	82.1	3 758	99
DK	5.3	281	16
E	39.3	1 326	64
F	58.6	2 614	87
FIN	5.1	225	16
GB	59.0	2 517	87
GR	10.5	305	25
I	57.5	2 522	87
IRL	3.7	168	15
L	0.4	30	6
NL	15.6	729	31
P	9.8	305	25
S	8.9	380	22

a) Bestimmen Sie die Gini–Koeffizienten zu den drei Verteilungen.

b) Ändert sich die Disparität des Bruttoinlandsprodukts wesentlich, wenn man Luxemburg von der Betrachtung ausschließt?

Aufgabe 3.30

Fünf Unternehmen teilen sich einen Markt. Die Gewinne vor Steuern (in 1 000 Euro) sind:

$$10\,, \quad 120\,, \quad 10\,, \quad 40\,, \quad 20\,.$$

Bezeichne $t(x)$ die Steuer auf den Gewinn x. Betrachten Sie die drei folgenden Steuertarife:

a) proportionaler Steuertarif, $t(x) = 0.3x$,

b) progressiver Steuertarif,

$$t(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leq x \leq 20\,, \\ \dfrac{x-10}{200}\,x & \text{für} \quad 20 < x \leq 110\,, \\ 0.5x & \text{für} \quad x > 110\,, \end{cases}$$

c) Kopfsteuer, $t(x) = 1$.

Berechnen Sie für jeden der drei Steuertarife die Lorenzkurve und den Gini–Koeffizienten für die Gewinne vor Steuern sowie nach Steuern. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 3.31

Gegeben ist die Anzahl (in 100 000) und das durchschnittliche Nettoeinkommen je Monat (in 1 000 Euro) privater Haushalte im früheren Bundesgebiet für das Jahr 2006, geschichtet nach der Höhe des Haushaltsnettoeinkommens (vgl. Aufgabe 3.10):

Nettoeinkommen über ... bis einschließlich ...	Anzahl der Haushalte	Durchschnittliches Nettoeinkommen
0 – 1.5	16	1.12
1.5 – 2.5	50	1.98
2.5 – 5	206	3.13
5 – 10	18	6.75
Summe	290	

a) Berechnen Sie den Gini–Koeffizienten.

b) Zeichnen Sie die Lorenzkurve.

c) Wenn die Angaben über das durchschnittliche Nettoeinkommen fehlen würden, könnten Sie dann trotzdem eine Aussage über die Disparität treffen?

Aufgabe 3.32

Bei einer Untersuchung der monatlichen Haushaltseinkommen in Deutschland ergab sich folgende Übersicht:

Monatseinkommen in Euro	Anzahl Haushalte
0 – 750	347
750 – 1250	436
1250 – 1750	216
1750 – 5000	97

Berechnen Sie für diese Einkommensverteilung den Gini-Koeffizient.

Aufgabe 3.33

Die folgende Tabelle enthält die Schlusskurse zweier Aktien A und B an elf aufeinanderfolgenden Börsentagen:

Tag	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A	85	87	90	88	86	86	87	90	92	93	91
B	103	102	104	105	99	97	96	96	99	102	101

Messen Sie den Zusammenhang der Kurse der Aktien A und B mit einer geeigneten Maßzahl.

Aufgabe 3.34

Nach einem Trainingslager für die 200 Nachwuchsspieler eines Schachvereins stellen die Trainer folgenden Zusammenhang zwischen der Vereinszugehörigkeit in Jahren X und der Anzahl der Siege bei den Probeturnieren während des Lagers Y fest:

Vereins-zugehörigkeit X	Anzahl Siege Y		
über ... bis einschl. ...	0 – 1	2 – 4	5 – 6
0 – 1	40	10	0
1 – 2	20	30	5
2 – 4	10	25	15
4 – 8	0	15	30

a) Bestimmen Sie die Randverteilung von X und Y.

b) Geben Sie die Verteilung von X für "fünf bis sechs Siege" an, und errechnen Sie das arithmetische Mittel und die Varianz dieser Verteilung.

c) Berechnen Sie die mittlere Anzahl der Siege bei den Nachwuchspielern, die länger als ein Jahr und höchstens zwei Jahre im Verein sind.

d) Sind die beiden Merkmale unabhängig? Begründen Sie Ihre Aussage, indem Sie eine Maßzahl für die Abhängigkeit berechnen.

4 Zufallsvorgänge und Wahrscheinlichkeiten

Aufgabe 4.1

Geben Sie für die folgenden Zufallsexperimente die Ergebnismenge in geeigneter Form an:

a) Eine Münze (mit $K =$,,Kopf" und $Z =$,,Zahl") wird zweimal geworfen. Erscheint mindestens einmal ,,Zahl", so wird die Münze ein drittes Mal geworfen.

b) Ein Würfel wird einmal geworfen. Falls die Augenzahl ,,Sechs" ist, wird der Würfel ein weiteres Mal geworfen.

c) Eine Münze (mit $K =$,,Kopf" und $Z =$,,Zahl") wird solange geworfen, bis zum ersten Mal ,,Zahl" zweimal hintereinander erscheint. Die Münze soll jedoch nicht öfter als viermal geworfen werden.

d) Ein Würfel wird solange geworfen, bis die Summe aller geworfenen Augenzahlen mindestens vier ist.

Aufgabe 4.2

Aus einem Skat-Kartenspiel mit 32 Blatt wird zufällig eine Karte gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit

a) einen König oder ein As zu ziehen,

b) eine rote (Herz- oder Karo-) Sieben zu ziehen,

c) eine Kreuz-Karte zu ziehen, die nicht Figur (König, Dame, Bube) ist,

d) keinen Buben zu ziehen?

Aufgabe 4.3

Betrachten Sie die folgenden Laplace-Experimente.

a) Jemand würfelt sechsmal. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass keine ,,Eins" dabei ist?

b) Jemand würfelt dreimal. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau die Augenzahlen ,,Eins", ,,Zwei" und ,,Drei" dabei sind?

Aufgabe 4.4

Das Amtsgericht in Astadt sucht vier Schöffen. Der zuständige Beauftragte hat dazu eine Gruppe von sieben Personen zusammengestellt, von denen drei Personen weiblichen und vier Personen männlichen Geschlechts sind. Die Auswahl der Schöffen aus dieser Gruppe erfolgt zufällig.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) alle Schöffen Männer sind?

b) sich jeweils zwei Frauen und zwei Männer unter den Schöffen befinden?

c) mindestens ein Schöffe weiblich ist?

Aufgabe 4.5

Betrachten Sie das Lotto-Spiel „6 aus 49". Vernachlässigen Sie im Folgenden die Zusatzzahl sowie die Superzahl.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau k Richtige ($k = 0, 1, ..., 6$) getippt werden?

b) Bei diesem Lottospiel erhält man einen Gewinn, wenn man mindestens drei Richtige getippt hat. Wie groß ist folglich die Wahrscheinlichkeit, irgendeinen Gewinn zu erzielen?

Aufgabe 4.6

Eine Münze (mit K = „Kopf" und Z = „Zahl") wird so lange geworfen, bis zum zweiten Mal „Kopf" erscheint, jedoch höchstens fünfmal.

a) Geben Sie die Ergebnismenge Ω dieses Zufallsexperimentes explizit an.

b) Geben Sie die folgenden Ereignisse explizit an.

   (i) A : Bei den ersten beiden Würfen erscheint „Kopf" nicht.

   (ii) B : Beim ersten Wurf erscheint „Zahl" nicht.

   (iii) C : Der erste „Kopf" erscheint frühestens beim dritten Wurf.

Aufgabe 4.7

In einer Stadt erscheinen die drei Lokalblätter a, b und c. Das Ereignis A sei definiert durch

$$A: \begin{array}{l}\text{,,Ein zufällig ausgewählter erwachsener} \\ \text{Einwohner der Stadt liest Blatt } a.\text{``}\end{array}$$

Entsprechend seien die Ereignisse B und C definiert. Es ist bekannt, dass

$$\begin{array}{rrr} P(A) = 0,4 & P(B) = 0,50 & P(C) = 0,20 \\ P(A \cap B) = 0,1 & P(B \cap C) = 0,05 & P(A \cap C) = 0,15 \\ & P(A \cap B \cap C) = 0,04 & \end{array}$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter erwachsener Einwohner der Stadt

a) mindestens eine der drei Zeitungen liest,

b) ausschließlich b liest,

c) weder a noch b liest,

d) nur b und c liest,

e) höchstens zwei der drei Zeitungen liest.

Aufgabe 4.8

An der Haltestelle einer Regionalverkehrsbahn warten zwölf Personen. Die Bahn besteht aus drei Wagen. Nach Eintreffen der Bahn steigen die Wartenden in die Bahn ein. Jede Person wählt zufällig und unabhängig von den anderen Personen einen Wagen. Wie groß ist (unter der Annahme, dass es sich um ein Laplace-Experiment handelt) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) genau fünf Personen in den ersten Wagen steigen?

b) jeweils vier Personen in jeden Wagen steigen?

c) die zwölf Personen sich in Gruppen zu drei, vier und fünf Personen aufteilen?

Aufgabe 4.9

Einer Urne, die 3 rote und 4 blaue gleichartige Kugeln enthält, werden nacheinander ohne Zurücklegen einzelne Kugeln entnommen. Geben Sie die folgenden Ereignisse explizit an.

a) Spätestens nach dem 4. Zug sind alle roten Kugeln gezogen worden.

b) Es wird fünfmal gezogen und nach dem 5. Zug ist nur noch eine blaue Kugel in der Urne.

Aufgabe 4.10

Die Studenten Frank, Ralph und Stephan kandidieren als Vorsitzender der WiSo-Fachschaft bzw. als dessen Vertreter. Geben Sie die folgenden Ereignisse und deren Gegenereignisse explizit an.

a) Stephan wird zum Vorsitzenden gewählt.

b) Frank wird Vorsitzender oder Stellvertreter.

c) Ralph wird nicht Vorsitzender.

Aufgabe 4.11

a) Geben Sie die folgenden Verknüpfungen der Ereignisse A und B formal an.

  (i) Es tritt das Ereignis A, aber nicht das Ereignis B ein.

  (ii) Es tritt das Ereignis „A oder B" ein, aber nicht das Ereignis „A und B".

b) Von zwei Ereignissen A und B weiß man, dass $A \cap B = \emptyset$ und $A \cup B = \Omega$. Was kann man über die Ereignisse A und B aussagen?

Aufgabe 4.12

Ein Würfel wird einmal geworfen. A sei das Ereignis „die Augenzahl ist kleiner als 3", B bedeute das Ereignis „die Augenzahl ist eine ungerade Zahl". Ermitteln Sie die folgenden Ereignisse! Welche der Ereignisse sind gleich?

a) $A \cap B$

b) $A \cup B$

c) $\overline{A} \cap \overline{B}$

d) $\overline{A} \cup \overline{B}$

e) $\overline{A \cap B}$

f) $\overline{A \cup B}$

g) $A \cap \overline{B}$

h) $\overline{A} \cap B$

i) $A \cup \overline{B}$

j) $\overline{\overline{A} \cup B}$

Aufgabe 4.13

In einer Bank sind zwei unabhängig voneinander arbeitende Geldautomaten aufgestellt. Es ist bekannt, dass während einer Woche die Ausfallwahrscheinlichkeiten für die beiden Automaten $0,3$ bzw. $0,2$ betragen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass im Laufe einer Woche

a) mindestens ein Geldautomat ausfällt?

b) alle beiden Geldautomaten ausfallen?

c) kein Geldautomat ausfällt?

d) genau ein Geldautomat ausfällt?

Aufgabe 4.14

7% der Produktion eines Artikels besitzen den Fehler F_1; 5% besitzen den Fehler F_2. 90% der Produktion sind fehlerfrei. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein aus der Gesamtproduktion zufällig ausgewählter Artikel

a) beide Fehler besitzt?

b) beide Fehler besitzt, unter der Bedingung, dass er den Fehler F_1 besitzt?

c) beide Fehler besitzt, unter der Bedingung, dass er mindestens einen Fehler besitzt?

d) den Fehler F_2 besitzt, unter der Bedingung, dass er den Fehler F_1 nicht besitzt?

e) genau einen Fehler besitzt, unter der Bedingung, dass er den Fehler F_1 besitzt?

Aufgabe 4.15

Ein medizinischer Test für eine bestimmte Krankheit liefert mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% das richtige Ergebnis, d.h. wenn der Patient krank ist, ist der Test mit 99%-iger Wahrscheinlichkeit positiv; und wenn der Patient gesund ist, ist der Test mit 99%-iger Wahrscheinlichkeit negativ. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person krank ist, beträgt 0,001 (ein Tausendstel !). Eine zufällig ausgewählte Person wird nun dem Test unterzogen. Der Test fällt positiv aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person wirklich an der Krankheit leidet?

Aufgabe 4.16

In einer Schraubenfabrik wird an drei Maschinen A, B und C produziert. Maschine A produziert 25%, B produziert 35% und C produziert 40% der Schrauben. Die Ausschussanteile betragen 5% an Maschine A, 4% an Maschine B und 2% an Maschine C. Eine Schraube der Gesamtproduktion wird zufällig ausgewählt. Sie ist kaputt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie an Maschine A (B, C) produziert wurde?

Aufgabe 4.17

Eine unverfälschte Münze (mit $K =$ „Kopf“ und $Z =$ „Zahl“) wird dreimal geworfen. Betrachtet werden die folgenden Ereignisse:

A : In den ersten zwei Würfen liegt jeweils die gleiche Seite oben.
B : In den letzten zwei Würfen liegt jeweils die gleiche Seite oben.
C : Im ersten und im letzten Wurf liegt die gleiche Seite oben.

Prüfen Sie, ob die Ereignisse A, B und C paarweise unabhängig sind. Sind die drei Ereignisse global unabhängig?

Aufgabe 4.18

Ein Industrieprodukt bestehe aus drei Teilen. In der Fertigung bestehe Unabhängigkeit zwischen den Teilen. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teil Ausschuss ist, betrage für die drei Teile jeweils 3%, 5% und 6%.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Endprodukt völlig einwandfrei ist?

Aufgabe 4.19

In einer Reifenfabrik werden 40% der Reifen während der Frühschicht, 40% der Reifen während der Spätschicht und die restlichen 20% der Reifen während der Nachtschicht produziert. Es ist bekannt, dass der Anteil fehlerhafter Reifen für die Frühschicht 2%, für die Spätschicht 3% und für die Nachtschicht 8% beträgt.

a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein in dieser Fabrik produzierter Reifen fehlerhaft ist?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Reifen, von dem bekannt ist, dass er fehlerhaft ist, während der Nachtschicht (der Frühschicht, der Spätschicht) produziert wurde?

Aufgabe 4.20

Wie oft muss ein fairer Würfel mindestens geworfen werden, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens einmal eine gerade Augenzahl zu werfen, mindestens $0,9$ ist?

Aufgabe 4.21

Ein Unternehmen lässt ein bestimmtes Bauteil in den Betrieben A und B herstellen, und zwar 70 % in A. Bei der Produktion können zwei Fehler auftreten, nämlich F1 und F2. Von Betrieb A ist bekannt, dass

- 90 % der gefertigten Bauteile fehlerfrei sind,
- 7 % den Fehler F1 aufweisen,
- 5 % den Fehler F2 aufweisen.

Von Betrieb B ist bekannt, dass

- 4 % der gefertigten Bauteile den Fehler F1 aufweisen,
- alle Bauteile, die den Fehler F1 aufweisen, ebenfalls den Fehler F2 aufweisen,
- 95 % der gefertigten Bauteile fehlerfrei sind.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein aus der Gesamtproduktion des Unternehmens zufällig ausgewähltes Bauteil

a) beide Fehler aufweist?

b) aus A stammt, falls es den Fehler F1 aufweist?

c) den Fehler F1 nicht aufweist, falls es den Fehler F2 aufweist?

d) Sind die Ereignisse ,,Fehler F1 tritt auf" und ,,Fehler F2 tritt auf" stochastisch unabhängig?

Ein Tipp zur Bearbeitung: Erstellen Sie zuerst die Vier-Felder-Tafeln für die beiden Betriebe getrennt.

5 Zufallsgrößen und Verteilungen

Aufgabe 5.1

Ein Würfel wird zweimal geworfen. Der Wert der Zufallsvariablen X sei die kleinere der beiden geworfenen Augenzahlen bzw. die geworfene Augenzahl, wenn beide Würfel die gleiche Seite zeigen. Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion und die Verteilungsfunktion von X an.

Aufgabe 5.2

Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit $T_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und

$$P(X = x) = \begin{cases} 0,1 & \text{für } x = 1, 2, 3, 4, 5, \\ 0,5 & \text{für } x = 6. \end{cases}$$

a) Geben Sie die Verteilungsfunktion von X an.

b) Berechnen Sie $E[X]$ und $V[X]$.

c) Geben Sie die Quantilfunktion von X an.

Aufgabe 5.3

Eine (diskrete) Zufallsvariable X habe die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}k & \text{für } x = -1, \\ \frac{5}{12}k & \text{für } x = 0, \\ \frac{1}{12}k & \text{für } x = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie den Wert der Konstanten k.

b) Geben Sie die Verteilungsfunktion von X an.

c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz dieser Zufallsvariablen.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse:

  (i) $A = \{X > 0\}$

(ii) $B = \{X \leq 0,5\}$

(iii) $C = \{-0,8 \leq X < 1\}$

(iv) $D = \{0,3 < X \leq 2\}$.

Aufgabe 5.4

Gegeben sei die Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ \frac{1}{4}x^2 & \text{für } 0 \leq x \leq 2, \\ 1 & \text{für } x > 2. \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Dichte von X und geben Sie den Träger von X an.

b) Geben Sie die zugehörige Quantilfunktion Q_X an.

c) Berechnen Sie den Median, den Erwartungswert und die Varianz von X.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $\{X < 0,5\}$.

Aufgabe 5.5

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2x - c & \text{für } 1 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie c so, dass f eine Dichtefunktion ist.

b) Berechnen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion und die Quantilfunktion.

c) Berechnen Sie das p-Quantil von X für die Werte $p = 0,2$ und $p = 0,9$.

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X vom Erwartungswert um weniger als $\frac{1}{3}$ abweicht?

Aufgabe 5.6

Die Zufallsvariable X habe Erwartungswert -3 und Varianz 25.

a) Bestimmen Sie Erwartungswert und Standardabweichung der Zufallsvariablen $Y = -4X + \frac{1}{2}$.

b) Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit ab, dass die Zufallsvariable X einen Wert annimmt, der sich vom Erwartungswert um mindestens zehn unterscheidet.

Aufgabe 5.7

Sei X die Wertveränderung (in %) der Aktie A am morgigen Tag. Die Verteilungsfunktion von X sei

$$F(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

a) Bestimmen Sie die Quantilfunktion von X.

b) Bestimmen Sie den Median und den Quartilsabstand von X.

c) In der Finanzierung werden Quantile x_p auch als "value at risk" (VaR) bezeichnet, da sie angeben, welche Wertminderung (Wertsteigerung) mit einer Wahrscheinlichkeit von $(1-p)$ nicht überschritten (unterschritten) wird. Bestimmen Sie den VaR für die Aktie A für eine Wahrscheinlichkeit von 95%.

Aufgabe 5.8

Ein fairer Würfel wird zweimal unabhängig geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augenzahl beim zweiten Wurf größer ist als beim ersten Wurf?

Aufgabe 5.9

Eine (faire) Münze werde so lange geworfen bis entweder Zahl (Z) oder fünfmal hintereinander Wappen (W) erscheint. Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der durchgeführten Würfe.

a) Geben Sie eine geeignete Ergebnismenge an.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion und die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X.

c) Bestimmen Sie die Quantilfunktion. Welchen Wert haben die Quartile von X ?

d) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

Aufgabe 5.10

Die Zufallsvariable X sei stetig verteilt mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 24x^{-4}, & \text{falls } x \geq c, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie den Wert des Parameters c.

b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion und die Quantilfunktion der Zufallsvariablen X.

c) Berechnen Sie Erwartungswert, Varianz und Median der Zufallsvariablen X.

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten

$$P(X \leq 3), P(2,5 \leq X \leq 3,5), P(X = 3) \text{ und } P(X \geq 4).$$

Aufgabe 5.11

X und Y seien zwei voneinander unabhängige Zufallsvariablen mit $E[X] = 27$, $E[Y] = 13$, $V[X] = 10$ und $V[Y] = 12$. Berechnen Sie für die Zufallsvariablen

a) $Z_1 = 3X + 7Y$

b) $Z_2 = 3X - 7Y$

c) $Z = Z_1 + Z_2$

jeweils den Erwartungswert und die Varianz.

Aufgabe 5.12

Einem Verband gehören 5000 Selbständige an. Für einen zufällig ausgewählten Selbständigen sei
X = Einkommen aus selbständiger Arbeit,
Y = Einkommen aus Vermietung und Verpachtung,
Z = Einkommen aus Kapitalerträgen.
Gehen Sie davon aus, dass gilt:

$$\begin{array}{rrrr} E[X] = & 200\ 000 \text{ DM} & \sqrt{V[X]} = & 100\ 000 \text{ DM} \\ E[Y] = & 40\ 000 \text{ DM} & \sqrt{V[Y]} = & 10\ 000 \text{ DM} \\ E[Z] = & 60\ 000 \text{ DM} & \sqrt{V[Z]} = & 15\ 000 \text{ DM} \end{array}$$

Errechnen Sie Erwartungswert und Standardabweichung des Gesamteinkommens eines zufällig ausgewählten Selbständigen

a) unter der Annahme, dass X, Y und Z unabhängig sind.

b) unter der Annahme, dass $\rho_{XY} = \rho_{YZ} = \rho_{XZ} = 0,2$ ist.

Aufgabe 5.13

Gegeben seien zwei exponentialverteilte Zufallsvariablen $X \sim Exp(\lambda_X = 0,01)$ und $Y \sim Exp(\lambda_Y = 0,02)$. Die Zufallsvariablen seien voneinander unabhängig.
Berechnen Sie $E[X + Y]$, $V[X + Y]$, $Cov(X, Y)$, $\rho(X, Y)$ sowie $E[X \cdot Y]$.

6 Spezielle Verteilungen

Aufgabe 6.1

Ein Würfel wird fünfmal geworfen. Sei X die Anzahl der „Sechsen".

a) Bestimmen Sie die Verteilung von X.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei „Sechsen" geworfen werden?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als eine „Sechs" geworden wird?

Aufgabe 6.2

Bei einer Prüfung wird einem Kandidaten ein "Multiple-Choice"-Fragebogen vorgelegt. Dabei stehen unter jeder der neun Fragen in zufälliger Reihenfolge die richtige und zwei falsche Antworten. Zum Bestehen der Prüfung müssen mindestens 50% Antworten richtig angekreuzt werden. Ein Kandidat kreuzt bei jeder Frage eine der Antworten zufällig an.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht er die Prüfung?

b) Man bestimme den Erwartungswert und die Streuung der Zufallsvariablen X, der Anzahl der richtigen Antworten, die man durch zufälliges Ankreuzen erreicht.

Aufgabe 6.3

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein deutscher Urlauber sich in einem bestimmten afrikanischen Land eine seltene Infektionskrankheit zuzieht, sei $p = 0,0001$. Nehmen Sie an, in einem Jahr verbringen 20 000 Deutsche ihren Urlaub in diesem Land.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich mindestens ein deutscher Urlauber die Infektionskrankheit zuzieht? Welche Annahmen treffen Sie zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit?

b) Berechnen Sie Erwartungswert und Standardabweichung der Anzahl deutscher Urlauber, die sich mit der Krankheit infizieren.

Aufgabe 6.4

Eine Urne enthält 50 Kugeln, von denen fünf rot sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie mindestens zwei rote Kugeln ziehen, wenn Sie vier Kugeln ohne Zurücklegen aus der Urne ziehen? Wie groß wäre die entsprechende Wahrscheinlichkeit, wenn Sie mit Zurücklegen ziehen würden?

Aufgabe 6.5

Ein Veterinär soll eine (kleine) Rinderherde auf BSE untersuchen. Die Herde besteht aus 20 Tieren. Vier davon sind infiziert, aber noch nicht erkrankt; die übrigen Tiere sind nicht infiziert. Da man zum Nachweis einer Infektion das Tier töten muss, werden zufällig fünf Rinder aus der Herde ausgewählt und geschlachtet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass auf diese Weise die Erkrankung der Herde nachgewiesen wird?

Aufgabe 6.6

Ein regionaler Verkehrsbetrieb untersucht die Verluste durch Schwarzfahrten im Kurzstreckenbereich. Es wird festgestellt, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, kontrolliert zu werden, 5% beträgt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schwarzfahrer das erste Mal bei der 10. Fahrt kontrolliert wird?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schwarzfahrer frühestens bei der 10. Fahrt kontrolliert wird?

c) Wie hoch müsste das Bußgeld für Schwarzfahrer mindestens sein, damit sich Schwarzfahren nicht lohnt? (Gehen Sie von Fahrkartenpreisen von 3 DM aus.)

Aufgabe 6.7

In dem Call-Center einer Direktbank treffen erfahrungsgemäß werktags in der Zeit von 17.00 Uhr bis 19.00 Uhr durchschnittlich 24 Anrufe ein. Die Anzahl Anrufe kann als Poisson-verteilt angesehen werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass an einem Werktag

a) zwischen 17.00 Uhr und 17.20 Uhr keine Anrufe eintreffen?

b) in der Zeit zwischen 18.00 Uhr und 18.30 Uhr mehr als vier Anrufe eingehen?

c) zwischen 17.15 Uhr und 17.45 Uhr maximal fünf Anrufe eingehen, wenn bekannt ist, dass zwischen 17.15 Uhr und 18.15 Uhr genau zehn Anrufe eingegangen sind? (Nehmen Sie an, dass die Anzahl der Anrufe zwischen 17.15 Uhr und 17.45 Uhr unabhängig von der Anzahl der Anrufe zwischen 17.45 Uhr und 18.15 Uhr ist.)

Aufgabe 6.8

Ein Billiganbieter stellt Mikrochips her. Ein von diesem Anbieter hergestellter Chip ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% defekt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Kauf von fünf dieser Chips

a) höchstens zwei Chips,

b) weniger als zwei Chips,

c) mindestens drei Chips,

d) mindestens einen Chip

mit einem Defekt zu erhalten?

Aufgabe 6.9

Die Firma Invinoveritas lagert in einem ihrer Weinkeller 80 Rotwein- und 40 Weißwein-Fässer. Dieser Weinkeller wurde beim letzten Hochwasser überflutet, so dass die Fässer nun völlig ungeordnet im Keller liegen. Der Inhaber lässt zunächst sechs Fässer aus dem Keller holen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich darunter

a) genau drei Weißwein- und drei Rotwein-Fässer,

b) mindestens ein Rotwein-Fass,

c) höchstens vier Weißwein-Fässer

befinden?

Aufgabe 6.10

Die Versuche eines bestimmten Fahrschülers, die Führerscheinprüfung zu bestehen, können als unabhängige Versuche aufgefasst werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass er die Prüfung besteht, sei konstant $0,6$.

a) Bestimmen Sie die durchschnittliche Anzahl Versuche (bzw. Prüfungen) bis zum Erhalt des Führerscheins.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Fahrschüler mehr als vier weitere Versuche benötigt, wenn er bereits bei zwei Prüfungen durchgefallen ist.

Aufgabe 6.11

An einem bestimmten Drive-In-Restaurant halten im Schnitt neun Motorroller pro Stunde. Gehen Sie davon aus, dass die Anzahl der Motorroller pro Stunde Poisson-verteilt ist.

a) Wie viele Motorroller kommen durchschnittlich innerhalb einer halben Stunde?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb von 20 Minuten mehr als vier Motorroller kommen?

Aufgabe 6.12

Jemand wartet auf einen Anruf. Es ist abgemacht, dass der Anruf irgendwann zwischen 14.00 Uhr und 16.00 Uhr erfolgen soll. Der Zeitpunkt des Anrufs, X , sei rechteckverteilt (zwischen 14.00 Uhr und 16.00 Uhr).

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Anruf zwischen 15.30 Uhr und 16.00 Uhr erfolgt?

b) Es ist nun 15.15 Uhr, und das Telefon hat noch nicht geklingelt. Wie groß ist jetzt die Wahrscheinlichkeit, dass der Anruf zwischen 15.30 Uhr und 16.00 Uhr erfolgt?

Aufgabe 6.13

Die Zufallsvariable X beschreibe die Lebensdauer eines Fernsehgeräts (in h). Angenommen, X ist exponentialverteilt. Bestimmen Sie den Erwartungswert und den Median dieser Zufallsvariablen, wenn bekannt ist, dass $P(X \geq 10\,000) = 0,7$ gilt.

Aufgabe 6.14

Eine Zufallsvariable X sei exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 0,01$.

a) Berechnen Sie $P(X > 100)$.

b) Berechnen Sie $P(X > 1000 \mid X > 900)$.

c) Halten Sie es für angemessen, die Lebensdauer von technischen Geräten durch eine exponentialverteilte Zufallsvariable zu beschreiben? Kurze Begründung. (Hinweis: Machen Sie sich die Ergebnisse aus den Aufgabenteilen a) und b) zunutze.)

Aufgabe 6.15

In einer Fernseh-Spielshow wird von einem Mitspieler ein Glücksrad mit stetiger 360°-Einteilung in Bewegung gesetzt und der Stillstand abgewartet. Der angezeigte Winkel in Grad wird als Zufallsvariable X aufgefasst. Nehmen Sie an, dass $X \sim R(0;360)$ gilt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Glücksrad einen Winkel zwischen 100 und 200 Grad anzeigt?
Bestimmen Sie den Median von X.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Glücksrad einen Winkel zwischen $10 \cdot n$ und $10 \cdot (n+1)$ Grad anzeigt ($n \in \{0, 1, ..., 35\}$)?

c) Der Spieler erhält einen Gewinn in Höhe von n Euro, wenn das Glücksrad einen Winkel zwischen $10 \cdot n$ und $10 \cdot (n+1)$ Grad anzeigt.
Fassen Sie den Gewinn als Zufallsvariable Y auf und geben Sie deren Verteilung sowie Erwartungswert und Standardabweichung an.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, weniger als 15 Euro als Gewinn zu erhalten?
Berechnen Sie den Median von Y.

Aufgabe 6.16

Die Lebensdauer X eines elektonischen Bauteils sei exponentialverteilt mit Parameter λ. Für die Aufgabenteile a) bis c) sei $\lambda = \frac{1}{500}$.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Bauteil vor dem Zeitpunkt $t_0 = 200$ nicht ausfällt?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Bauteil zwischen den Zeitpunkten $t_1 = 200$ und $t_2 = 300$ ausfällt?

c) Welche Zeitpunkte überlebt das Bauteil mit mindestens 90% Wahrscheinlichkeit?

d) Welchen Wert müsste der Parameter λ besitzen, damit mit Wahrscheinlichkeit 0,9 die Lebensdauer des Bauteils mindestens 50 Stunden beträgt?

7 Normalverteilung und zentraler Grenzwertsatz

Aufgabe 7.1

Gegeben sei die normalverteilte Zufallsvariable X. Es ist bekannt, dass in 15,87% aller Fälle der Wert von X kleiner ist als 4 und in 2,5% aller Fälle größer als 21,76. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz der Zufallsvariablen.

Aufgabe 7.2

In einer Fabrik werden Konservendosen abgefüllt, deren Nettofüllgewicht als normalverteilt angesehen werden kann. Das durchschnittliche Nettofüllgewicht der Dosen beträgt 249,2 Gramm, die Standardabweichung 11,37 Gramm. Das Label der Dosen gibt ein Nettofüllgewicht von 240 Gramm an. Berechnen Sie den Anteil Dosen, die untergewichtig sind.

Aufgabe 7.3

Die Zufallsvariable X sei standardnormalverteilt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallsvariable $Y = 25 \cdot X - 6$

a) höchstens den Wert 30 annimmt.

b) mindestens den Wert 10 annimmt.

c) einen Wert von mindestens 20, aber kleiner als 24 annimmt.

d) den Wert 25 annimmt.

Aufgabe 7.4

Die tatsächliche Flugzeit X [in Minuten] von Köln nach Washington kann als normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 aufgefasst werden. Es sei bekannt, dass $P(X \leq 470) = 0,9332$ und $P(X > 426) = 0,7580$.

a) Bestimmen Sie aus diesen Angaben μ und σ^2.

b) Welche Flugzeit wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% nicht überschritten?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die tatsächliche Flugzeit zwischen 420 und 460 Minuten?

Aufgabe 7.5

Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable. Sie kennen zwei Quantile der Verteilung, nämlich $x_{0,4} = 0,7467$ und $x_{0,7} = 1,5244$.

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass X negativ wird?

Aufgabe 7.6

Eine große Hausverwaltung, die einen Bestand von 10 000 Wohnungen betreut, möchte etwas über die Zufriedenheit der Mieter mit ihren Wohnungen wissen. Dazu werden aus dem Bestand 100 Wohnungen zufällig und ohne Zurücklegen ausgewählt und die Mieter befragt. Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass in der Grundgesamtheit der 10 000 Wohnungen 70% der Mieter mit der Wohnung im Allgemeinen zufrieden sind. 5% der Mieter sind jedoch sehr unzufrieden.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 100 ausgewählten Mietern weniger als 50 mit der Wohnung im Allgemeinen zufrieden sind? Geben Sie zunächst eine Formel für die gesuchte Wahrscheinlichkeit an und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dann näherungsweise durch geeignete Approximationen.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 100 ausgewählten Mietern mindestens zwei mit der Wohnung sehr unzufrieden sind?

Aufgabe 7.7

Der Ausschuss-Prozentsatz in einer Produktionsserie von Lautsprecherboxen betrage 6%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer Palette von 50 Stück aus dieser Produktion höchstens drei Ausschussstücke zu finden?

Aufgabe 7.8

In einer Lieferung von 400 Computernetzgeräten sind 40 defekte Geräte enthalten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich bei einer Überprüfung von 20 zufällig ausgewählten Geräten mehr als vier Geräte als defekt erweisen?

Aufgabe 7.9

In einer Urne befinden sich zehn Kugeln, welche mit den Ziffern $0, 1, 2, ..., 8, 9$ durchnummeriert sind.

a) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der gezogenen Ziffer bei einmaligem zufälligen Ziehen aus der Urne.

b) Aus der Urne wird 50 Mal mit Zurücklegen gezogen. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der Summe der gezogenen Ziffern.

c) Wie ist die Summe der gezogenen Ziffern näherungsweise verteilt?

Aufgabe 7.10

Zwei Würfel werden 100mal gleichzeitig geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens dreimal zwei Sechsen oben liegen?

8 Schließende Statistik – Schätzen

Aufgabe 8.1

Aus der Grundgesamtheit der Wähler eines Bundeslandes werden $n = 1100$ Personen zufällig und mit Zurücklegen ausgewählt. Sei

$$X_i = \begin{cases} 1 & i\text{-te Person wählt die A-Partei,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Wie ist $\sum_{i=1}^{1100} X_i$ zu interpretieren?

b) Wie ist $\sum_{i=1}^{1100} X_i$ verteilt?

c) Nehmen Sie an, genau 40% der Wähler des Bundeslandes wählen die A-Partei. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in der Stichprobe mehr als 50% (also mehr als 550) A-Wähler befinden?

Aufgabe 8.2

Die Brenndauer von Glühlampen (in 1000 Stunden) eines bestimmten Typs sei $Exp(\lambda)$-verteilt. $X_1, X_2, ..., X_{50}$ sei eine einfache Stichprobe aus $X \sim Exp(\lambda)$.

a) Wie sind $\sum_{i=1}^{50} X_i$ und $\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} X_i$ näherungsweise verteilt, wenn $\lambda = 0,2$ ist?

b) Betrachten Sie die von X_i abhängenden Zufallsvariablen

$$Y_i = \begin{cases} 1 & X_i \geq 3, \\ 0 & X_i < 3. \end{cases}$$

(i) Wie sind $\sum_{i=1}^{50} Y_i$ und $\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} Y_i$ zu interpretieren?

(ii) Wie ist $\sum_{i=1}^{50} Y_i$ verteilt, wenn $\lambda = 0,2$ ist?

Aufgabe 8.3

Eine Zufallsvariable X sei normalverteilt mit Erwartungswert 100 und Varianz 36. Es wird eine einfache Zufallsstichprobe $X_1, X_2, ..., X_{10}$ vom Umfang $n = 10$ gezogen und der Stichprobenmittelwert $\overline{X}$ berechnet.

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert des Stichprobenmittelwerts.

b) Bestimmen Sie die Varianz des Stichprobenmittelwerts.

c) Standardisieren Sie den Stichprobenmittelwert und geben Sie die Verteilung der neuen Zufallsvariable an.

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass $\overline{X}$ größer als 102 ist?

e) Berechnen Sie das 0,1-Quantil und das 0,9-Quantil von $\overline{X}$. Was sagen sie aus?

Aufgabe 8.4

Sei $X_1, X_2, ..., X_n$ eine einfache Stichprobe aus X mit $E[X] = \mu$ und $V[X] = \sigma^2$. Zur Schätzung von μ werden die folgenden Schätzer vorgeschlagen:

$$T_1 = \overline{X}$$
$$T_2 = \frac{1}{2}(X_2 + X_n)$$
$$T_3 = \frac{4}{5}\overline{X}$$

a) Prüfen Sie die Schätzer auf Erwartungstreue.

b) Bestimmen Sie die Varianzen der Schätzer.

c) Welchen der Schätzer würden Sie vorziehen?

Aufgabe 8.5

Auf einer Maschine werden Werkstücke hergestellt, deren Länge eine Varianz von

$(2,8\ \mathrm{mm})^2$ aufweist. Eine Zufallsstichprobe von zehn Stück ergab folgende Werte in mm:

41,6	37,1	42,4	39,3	40,2
36,1	37,6	43,5	36,7	37,2

Geben Sie ein Konfidenzintervall für den unbekannten Mittelwert der Werkstücklänge zu einem Niveau von mindestens $1 - \alpha = 0,95$ an.

Aufgabe 8.6

Das Einzelgewicht X von Bananen einer bestimmten Sorte sei als normalverteilte Zufallsvariable anzusehen. Eine einfache Stichprobe vom Umfang $n = 9$ erbrachte ein Gesamtgewicht von $1686,60$ (Gramm) und eine Stichprobenvarianz von $s^2 = 6,74^2$ (Gramm^2).

a) Geben Sie eine Punktschätzung für das durchschnittliche Gewicht einer einzelnen Banane dieser Sorte an.

b) Geben Sie ein 0,95-Konfidenzintervall für den unbekannten Mittelwert μ an.

Aufgabe 8.7

In der Mühle eines Freilichtmuseums wird nach alter Tradition Mehl gemahlen und in Säcke verpackt. Das Einzelgewicht X eines Mehlsacks kann als normalverteilte Größe angesehen werden. Die Varianz des Gewichts sei aus langjähriger Erfahrung bekannt und betrage $(15\ \text{Gramm})^2$. Eine einfache Stichprobe vom Umfang $n = 16$ erbrachte ein Gesamtgewicht von 7936 Gramm.

a) Geben Sie eine Punktschätzung für das durchschnittliche Gewicht eines einzelnen Mehlsacks an.

b) Bestimmen Sie ein konkretes 0,90-Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ an.

c) Wie groß muss der Stichprobenumfang n mindestens sein, wenn das 90%-Konfidenzintervall höchstens eine Breite von 6 Gramm haben soll?

Aufgabe 8.8

Die Vorschriften für die Produktion einer bestimmten Aluminiumlegierung verlangen einen durchschnittlichen Natriumgehalt von mindestens $0,03\%$ und höchstens $0,1\%$. Aus Erfahrung weiß man, dass der Natriumgehalt einer Legierung normalverteilt mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung $\sigma = 0,015\%$ ist.

Eine Stichprobe der Länge 9 ergab die folgenden Werte für den Natriumgehalt (in %):

$$0,0701\ ;\ 0,0697\ ;\ 0,0693\ ;\ 0,0698\ ;\ 0,0703\ ;$$
$$0,0700\ ;\ 0,0702\ ;\ 0,0701\ ;\ 0,0705\ .$$

a) Geben Sie ein Konfidenzintervall für μ zum Konfidenzniveau $1-\alpha = 0,99$ an.

b) Wie groß muss die Stichprobenlänge mindestens sein, damit ein Konfidenzintervall für μ zum Konfidenzniveau $1-\alpha = 0,99$ eine Breite von höchstens $0,01$ hat?

9 Schließende Statistik – Testen

Aufgabe 9.1

Eine Ladenkette fordert von den Erzeugern für Eisbergsalat ein mittleres Kopfgewicht von mindestens 1000 Gramm. Das Gewicht kann als normalverteilte Größe angesehen werden. Aus einer Lieferung wird eine Stichprobe vom Umfang $n = 7$ gezogen. Man erhält $\overline{x} = 960,7$ (Gramm) und $s = 46,5$ (Gramm).
Prüfen Sie auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$, ob das mittlere Kopfgewicht der Forderung entspricht.

Aufgabe 9.2

Ein Hersteller von Ventilatoren für PC's gibt für die Ventilatoren eine mittlere Lebensdauer von mindestens 3000 Stunden an. Ein Verbraucherinstitut behauptet, die Lebensdauer sei geringer, und testet 50 Ventilatoren. Für diese ergibt sich eine mittlere Lebensdauer von 2900 Stunden bei einer Stichprobenvarianz von (160 Stunden)^2.

Ist die Behauptung des Herstellers mit dem Stichprobenergebnis vereinbar ($\alpha = 0,05$)?

Aufgabe 9.3

Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, ..., X_n$ seien unabhängig und identisch normalverteilt mit Standardabweichung $\sigma = 5$ und unbekanntem Erwartungswert.
Eine einfache Zufallsstichprobe vom Umfang $n = 81$ ergibt einen Stichprobenmittelwert von $\overline{x} = 37$.

a) Überprüfen Sie mittels eines geeigneten Testverfahrens die Nullhypothese, dass der Erwartungswert μ größer oder gleich 38, gegen die Alternative, dass der Erwartungswert kleiner als 38 ist, bei einem α von 0,05.

b) Nehmen Sie an, dass der Erwartungswert tatsächlich 37 ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art?

Aufgabe 9.4

Von der Abfüllanlage einer Brauerei werden Flaschen gefüllt, wobei die Füllmenge X pro Flasche gewissen Schwankungen unterliegt und als normalverteilte Zufallsvariable mit bekannter Standardabweichung $\sigma = 1,5[cm^3]$ angesehen werden kann. Die Hypothese H_0, dass der Erwartungswert μ dieser Normalverteilung gleich dem Sollwert $\mu_0 = 330[cm^3]$ ist, soll anhand einer Stichprobe der Länge $n = 30$ überprüft werden.

Aufgrund der Interessenlage derjenigen Personen, die die Untersuchung vornehmen, unterscheiden wir drei Fälle, nämlich: Die Überprüfung geschieht durch:

a) (i) eine Eichkommission, die an einer Abweichung vom Sollwert $\mu_0 = 330$ sowohl nach unten als auch nach oben interessiert ist,
   (ii) eine Verbraucherorganisation, deren Interesse nur der Frage gilt, ob der wahre Erwartungswert μ kleiner als der Sollwert μ_0 ist,
   (iii) den Brauereibesitzer, von dem wir hier annehmen, dass er lediglich wissen will, ob im Mittel zu viel abgefüllt wird.

b) Formulieren Sie für jeden der drei Fälle das entsprechende Testproblem (d.h. H_0 und H_1) und bestimmen Sie dafür jeweils einen Test. Das Niveau der Tests sei jeweils $\alpha = 0,01$. Für welche Werte von $\overline{x}$ wird die Nullhypothese bei den drei Tests abgelehnt?

c) Als Stichprobenmittel für die Füllmenge ergab sich der Wert $\overline{x} = 329,33[cm^3]$. Wie entscheiden Sie sich in den drei Fällen?

10 Regressionsanalyse

Aufgabe 10.1

Bei $n = 12$ Personen wurde die Körpergröße x_i [in cm] und das Gewicht y_i [in kg] ermittelt. Dabei ergaben sich die folgenden zusammengefassten Werte:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 2088, \qquad \sum_{i=1}^{n} y_i = 888$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 364464, \qquad \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 67330, \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 155784$$

Nehmen Sie an, dass die Werte $y_1, ..., y_{12}$ Realisierungen stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen $Y_1, ..., Y_{12}$ sind und dass für $i = 1, ..., 12$ gilt:

$$Y_i = a + bx_i + U_i \qquad \text{mit } U_i \sim N\left(0, \sigma^2\right).$$

Ferner seien $U_1, ..., U_{12}$ stochastisch unabhängig.

a) Berechnen Sie Schätzwerte für a, b und σ^2.

b) Schätzen Sie die Standardabweichungen der Schätzer für a und b.

c) Geben Sie ein Konfidenzintervall für a zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0,95$ an.

d) Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : b = 1$ gegen die Alternative $H_1 : b \neq 1$ zu einem Signifikanzniveau $\alpha = 0,05$.

Aufgabe 10.2

Eine Unternehmensabteilung ist ausschließlich mit der Herstellung eines Produkts beschäftigt. Für 10 Perioden wurden folgende Produktionsmengen x_i und Gesamtkosten y_i registriert.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	9	12	14	12	12	13	10	11	12	15
y_i	1216	1300	1356	1288	1276	1292	1260	1244	1288	1360

Nehmen Sie an, dass die Werte $y_1, \ldots, y_{10}$ Realisierungen stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen $Y_1, \ldots, Y_{10}$ sind und dass für $i = 1, \ldots, 10$ gilt:

$$Y_i = a + bx_i + U_i \quad \text{mit} \quad U_i \sim N(0, \sigma_U^2).$$

Ferner seien $U_1, \ldots, U_{10}$ stochastisch unabhängig.

a) Berechnen Sie Schätzwerte für a, b und σ^2.

b) Schätzen Sie die Standardabweichungen der Schätzer $\hat{a}$ und $\hat{b}$.

c) Geben Sie ein Konfidenzintervall für b zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0,95$ an.

d) Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : a = 900$ gegen die Alternative $H_1 : a \neq 900$ zu einem Signifikanzniveau $\alpha = 0,05$.

Aufgabe 10.3

Bei 50 Neugeborenen wurden jeweils die Größe (in cm) und das Gewicht (in kg) gemessen. Dabei ergab sich eine durchschnittliche Größe von 51,77cm bei einer Standardabweichung von 3,04cm. Das mittlere Gewicht der Kinder betrug 3,38kg bei einer Standardabweichung von 0,63kg. Die Kovarianz von Größe und Gewicht hatte den Wert 1,65.

Nehmen Sie an, dass die Annahmen des Modells der linearen Einfachregression mit normalverteilten Störgrößen erfüllt sind.

a) Schätzen Sie die Koeffizienten einer linearen Regression vom Gewicht auf die Größe.

b) Geben Sie ein Konfidenzintervall für den Koeffizienten b zum Konfidenzniveau 0,95 an.

c) Testen Sie zum Niveau $\alpha = 0,05$ die Nullhypothese, dass der Koeffizient b höchstens den Wert 0,15 hat.

Aufgabe 10.4

In einer Studie der britischen Regierung über das Konsumverhalten von Haushalten in verschiedenen Regionen des Landes wurden unter anderem die Anteile der Ausgaben für Tabak X und Alkohol Y an den Gesamtausgaben der Haushalte ermittelt.

Region	X	Y
North	6.47	4.03
Yorkshire	6.13	3.76
Northeast	6.19	3.77
East Midlands	4.89	3.34
West Midlands	5.63	3.47
East Anglia	4.52	2.92
Southeast	5.89	3.20
Southwest	4.79	2.71
Wales	5.27	3.53
Scotland	6.08	4.51
Northern Ireland	4.02	4.56

a) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten r_{XY}. Wie würden Sie den Zusammenhang zwischen den Ausgabenanteilen für Tabak und Alkohol charakterisieren?

Es gilt

$$\sum_{i=1}^{11} x_i = 59.88\,, \qquad \sum_{i=1}^{11} x_i^2 = 332.3292\,,$$

$$\sum_{i=1}^{11} y_i = 39.80\,, \qquad \sum_{i=1}^{11} y_i^2 = 147.4930\,,$$

$$\sum_{i=1}^{11} x_i y_i = 217.7103\,.$$

b) Berechnen Sie die Koeffizienten der linearen Regression von Alkohol auf Tabak sowie den Anteil der durch die Regression erklärten Varianz.

c) Führen Sie a) und b) erneut durch, jedoch diesmal ohne die Werte für Northern Ireland. Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 10.5

Für fünf ausgewählte private Haushalte wurden jeweils Monatsdurchschnitte für die Höhe des Nettoeinkommens X und die Höhe der Telefonrechnung Y ermittelt:

Haushalt	Nettoeinkommen X (in 1 000 Euro)	Telefonrechnung Y (in 100 Euro)
1	2.6	1.2
2	2.1	0.7
3	1.4	0.5
4	3.5	2.0
5	1.7	0.6

a) Berechnen Sie die Koeffizienten der linearen Einfachregression von Y auf X.

b) Prognostizieren Sie unter Verwendung der Ergebnisse von Aufgabe a) die Höhe der Telefonrechnung für einen Haushalt mit einem durchschnittlichen Nettoeinkommen von 2 200 Euro im Monat.

c) Um wie viel veränderten sich die durchschnittlichen Ausgaben für das Telefon pro Haushalt, wenn das monatliche Nettoeinkommen um 200 Euro steigt?

d) Berechnen Sie das Bestimmtheitsmaß und interpretieren Sie es. Welchen Wert hat der Korrelationskoeffizient?

Aufgabe 10.6

Der Output Y einer Volkswirtschaft sei in Abhängigkeit der eingesetzten Produktionsfaktoren Arbeit L und Kapital K betrachtet. Im Folgenden wird unterstellt, dass diese Abhängigkeit durch eine Cobb-Douglas-Produktionsfunktion der Form $Y = \alpha K^{b_1} L^{b_2}$ beschrieben werden kann. Für die Jahre 2005 bis 2010 liegen folgende Beobachtungen des Outputs und der Produktionsfaktoren vor:

i	1	2	3	4	5	6
y_i (Mrd Euro)	2270	2300	2400	2470	2500	2570
k_i (Mrd Euro)	16000	17000	19000	22000	22000	24000
l_i (1000 Besch.)	22000	23000	24000	24000	23500	25000

a) Wie muss die Produktionsfunktion transformiert werden, damit die partiellen Elastizitäten b_1 und b_2 mittels linearer Regression geschätzt werden können?

b) Schätzen und interpretieren Sie die Koeffizienten α, b_1 und b_2.

c) Berechnen Sie das Bestimmtheitsmaß der Regression.

Aufgabe 10.7

Aufgrund einer Erhebung für zwei metrische Merkmale bei $n = 8$ Einheiten einer Grundgesamtheit sind folgende Werte bekannt:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 297\,, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 36\,, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = 57\,, \quad \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = 188\,, \quad \sum_{i=1}^{n} {y_i}^2 = 517\,.$$

Berechnen Sie

a) eine Maßzahl für die Stärke des linearen Zusammenhangs zwischen X und Y,

b) die Koeffizienten der beiden Regressionsgeraden $y = a + bx$ und $x = c + dy$.

Aufgabe 10.8

Berechnen Sie zu der folgenden Kontingenztabelle die Regressionsgerade
$y = a + bx$.

X	Y			
	$\eta_1 = 1$	$\eta_2 = 2$	$\eta_3 = 3$	$\eta_4 = 4$
$\xi_1 = 2$	2	5		
$\xi_2 = 4$	4	8	2	
$\xi_3 = 6$	3	3	7	
$\xi_4 = 8$		3	2	5
$\xi_5 = 10$			3	3

Aufgabe 10.9

Die Weltbevölkerung betrug in den Jahren 1960 bis 2000:

Jahr	Bevölkerung (in Mrd.)
1960	3.02
1970	3.70
1980	4.45
1990	5.30
2000	6.06

a) Stellen Sie das Wachstum der Weltbevölkerung graphisch dar.

b) Berechnen Sie den linearen Trend sowie den exponentiellen Trend.

c) Schätzen Sie mit Hilfe der beiden Ansätze unter b) jeweils den Wert für 2006 und vergleichen ihn mit dem tatsächlichen Wert von 6.55 Milliarden.

d) Interpretieren Sie jeweils den Koeffizienten b.

Aufgabe 10.10

Der schweizerische "Landesindex der Konsumentenpreise" (Basis Mai 2000 = 100) betrug in den Jahren 1990 bis 2005:

Jahr	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
Index	82.8	87.6	91.2	94.2	95.0	96.7	97.5	98.0

Jahr	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Index	98.0	98.8	100.3	101.3	102.0	102.6	103.4	104.7

a) Berechnen Sie die durchschnittliche Wachstumsrate dieses Indexes für 1990 bis 2005 sowie 2000 bis 2005.

b) Bestimmen Sie den linearen und den exponentiellen Trend. Vergleichen Sie das jeweilige Ergebnis mit a).